المحاضرة النظرية الرابعة

سنَدرس في هذه المحاضرة المفاهيم الآتية :

1- رتبة التطبيق الخطي
2- التطبيق المتباين
3- التطبيق الغامر
4- التطبيق غير الشاذ (النظيمي)
5- التطبيق الشاذ

{ بفرض $f: V \to U$ تطبيق خطي وبفرض $v_1, v_2, \ldots, v_n$ تولد V فإن الأشعة $f(v_1), f(v_2), \ldots$ تولد $f(V)$ }

※ رتبة التطبيق الخطي ※

تعريف : بفرض $f: V \to U$ تطبيق خطي عندها نقول إن رتبة التطبيق الخطي $f: V \to U$ هي قياس الصورة المباشرة لهذا التطبيق الخطي ويرمز لرتبة التطبيق الخطي بالرمز $rank\ f$ حيث أن

$$rank\ f = d(f(V))$$

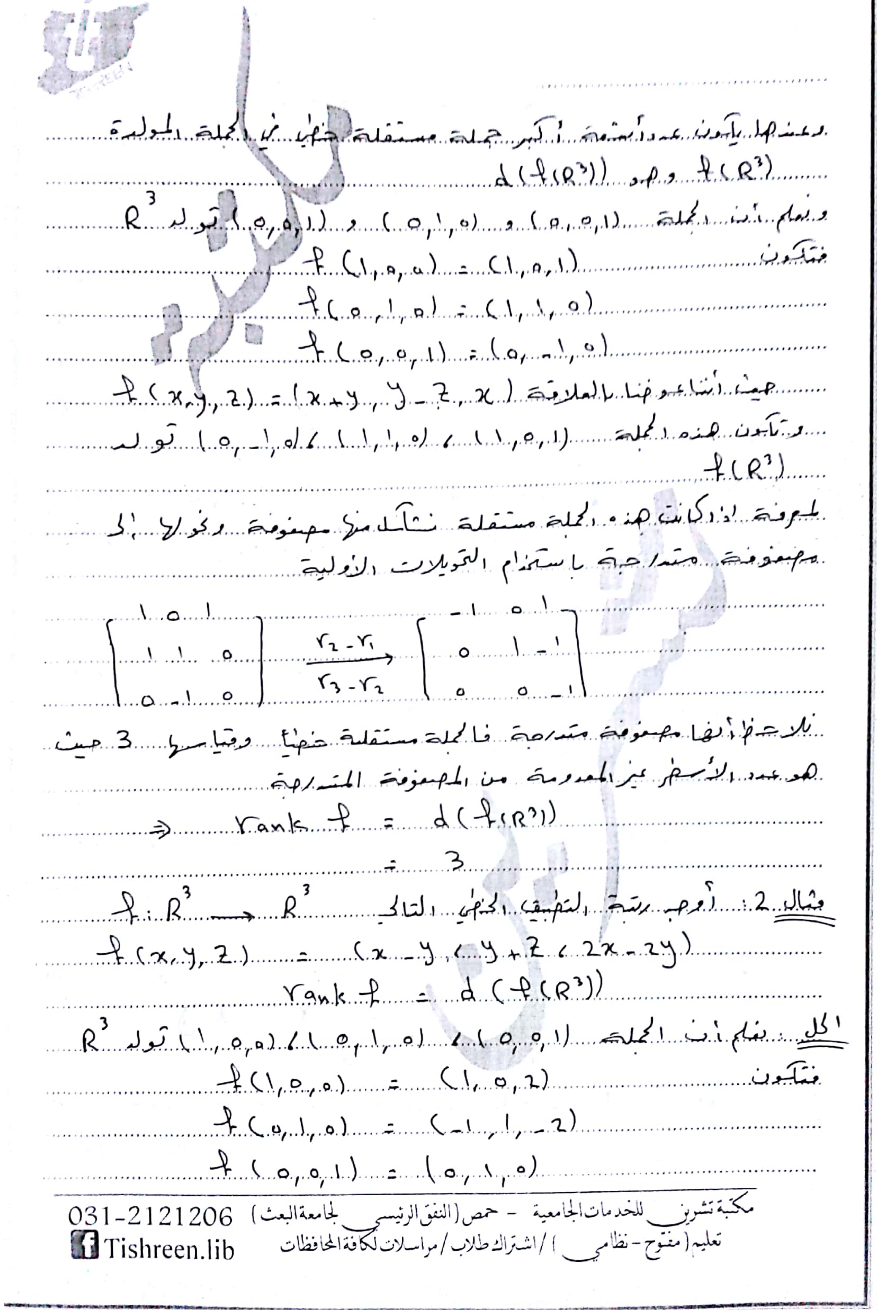
قياس الصورة المباشرة ← $rank\ f = d(f(V))$ → رتبة التطبيق

مثال 1: أوجد رتبة التطبيق الخطي $f: R^3 \to R^3$ حيث أن:

$$f(x, y, z) = (x+y, y-z, x)$$

$$rank\ f = d(f(R^3))$$

الحل : لمعرفة قياس الصورة المباشرة للتطبيق علينا أن نعرف إحدى الجمل المولدة لـ $f(R^3)$



وعندها يكون عدد أشعة أكبر جملة مستقلة خطياً في الجملة المولدة
$f(R^3)$ وهو $d(f(R^3))$
ونعلم أن الجملة $(1,0,0)$ و $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ تولد R^3
فتكون

$$f(1,0,0) = (1,0,1)$$
$$f(0,1,0) = (1,1,0)$$
$$f(0,0,1) = (0,-1,0)$$

حيث أننا عوضنا بالعلاقة $f(x,y,z) = (x+y, y-z, x)$
وتكون هذه الجملة $(1,0,1)$ ، $(1,1,0)$ ، $(0,-1,0)$ تولد
$f(R^3)$

لمعرفة إذا كانت هذه الجملة مستقلة نشكل منها مصفوفة ونحولها إلى مصفوفة متدرجة باستخدام التحويلات الأولية

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنها مصفوفة متدرجة فالجملة مستقلة خطياً وقياسها 3 حيث هو عدد الأسطر غير المعدومة من المصفوفة المتدرجة

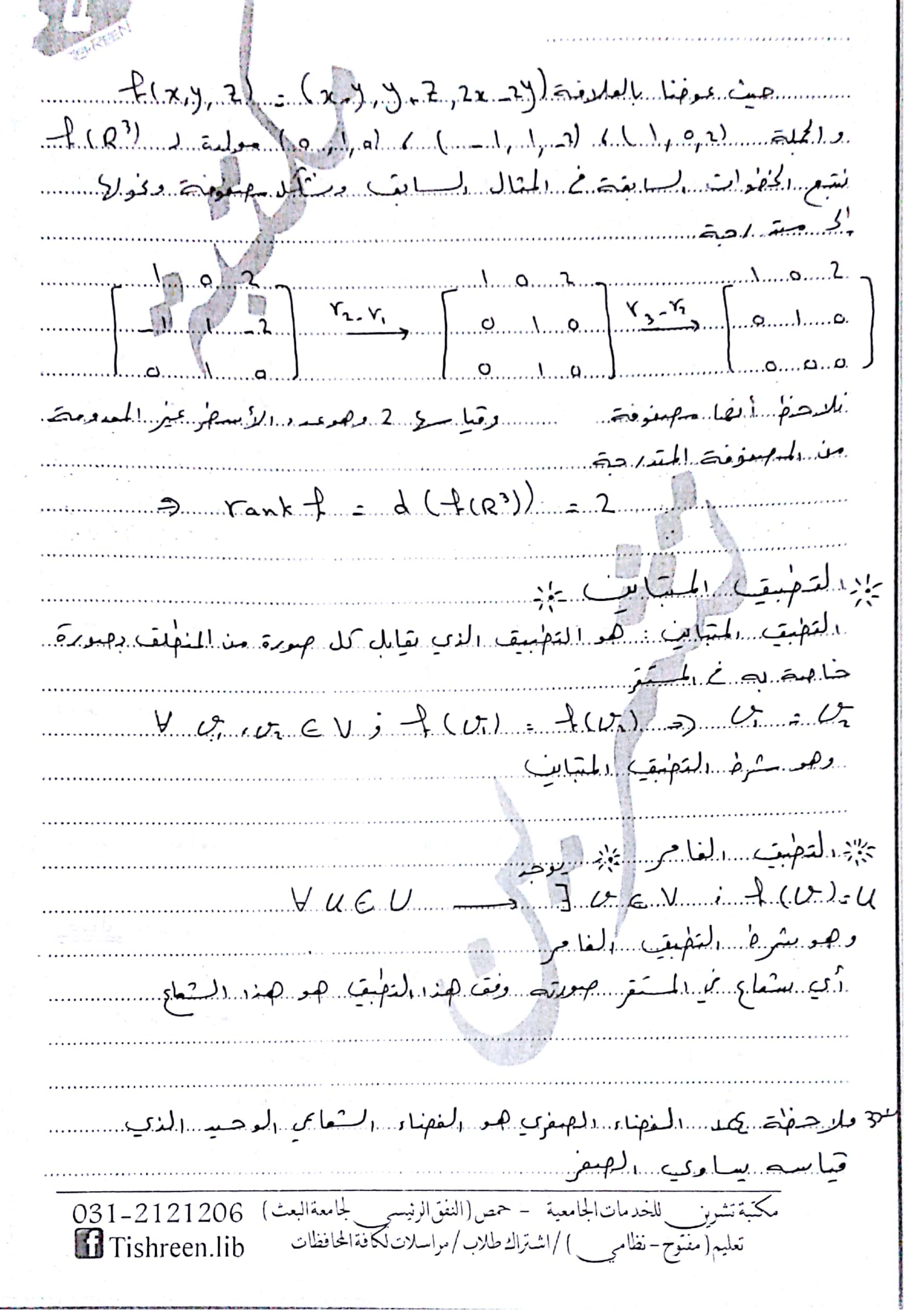
$$\Rightarrow \text{rank } f = d(f(R^3))$$
$$= 3$$

مثال 2: أوجد رتبة التطبيق الخطي التالي $f: R^3 \longrightarrow R^3$

$$f(x,y,z) = (x-y, y+z, 2x-2y)$$
$$\text{rank } f = d(f(R^3))$$

الحل: نعلم أن الجملة $(0,0,1)$ ، $(0,1,0)$ ، $(1,0,0)$ تولد R^3
فتكون

$$f(1,0,0) = (1,0,2)$$
$$f(0,1,0) = (-1,1,-2)$$
$$f(0,0,1) = (0,1,0)$$



حيث عرفنا بالعلاقة $f(x,y,z) = (x-y, y+z, 2x-2y)$

والجملة $(1,0,2)$ ، $(-1,1,-2)$ ، $(0,1,0)$ مولدة لـ $f(R^3)$

نتبع الخطوات السابقة في المثال السابق ونشكل مصفوفة ونحولها إلى متدرجة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنها مصفوفة وقياس 2 وهو عدد الأسطر غير المعدومة من المصفوفة المتدرجة

$$\Rightarrow \text{rank } f = d(f(R^3)) = 2$$

☼ التطبيق المتباين ☼

التطبيق المتباين : هو التطبيق الذي يقابل كل صورة من المنطلق بصورة خاصة به في المستقر

$$\forall v_1, v_2 \in V ; f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$$

وهو شرط التطبيق المتباين

☼ التطبيق الغامر ☼

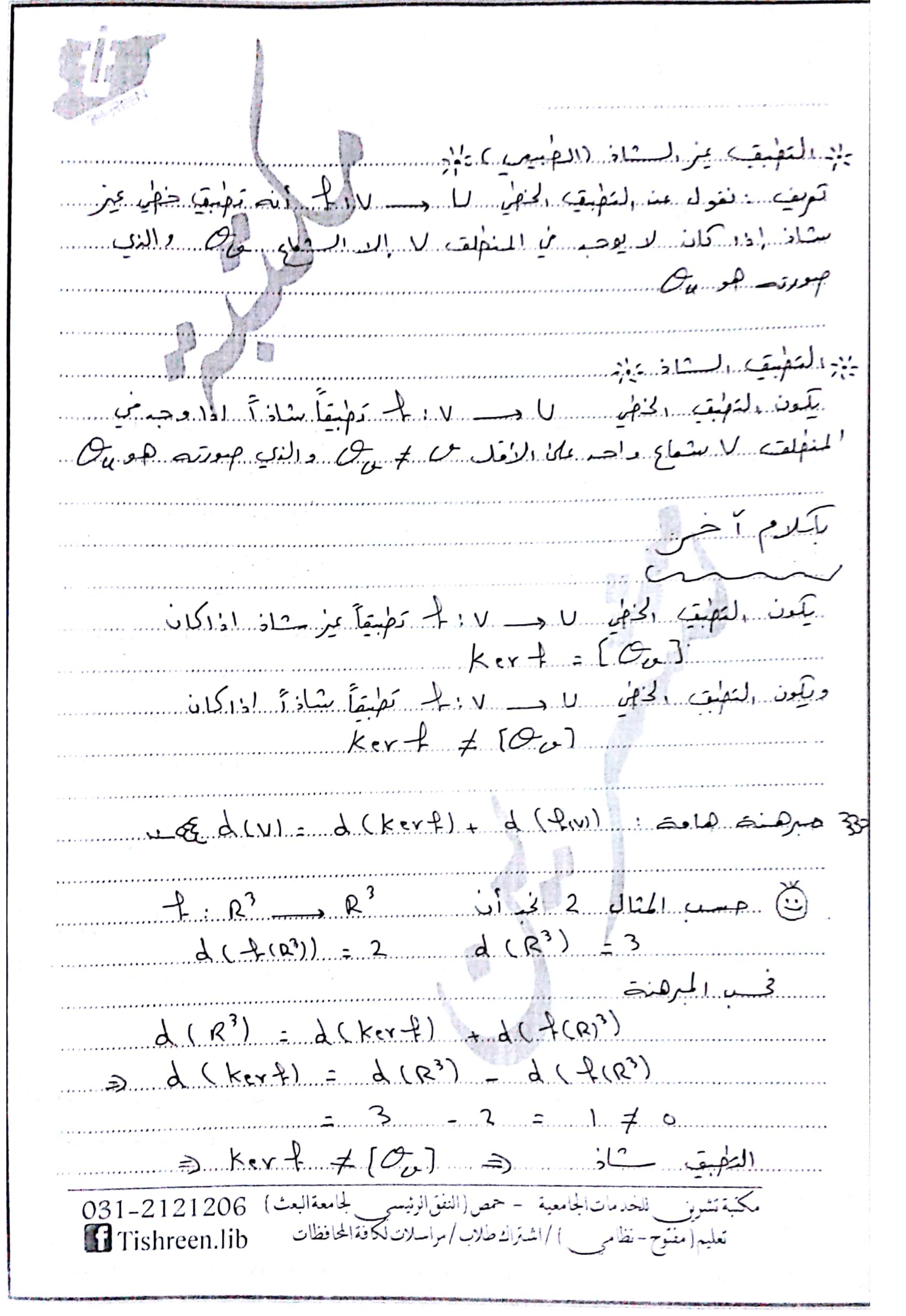
$$\forall u \in U \longrightarrow \exists v \in V ; f(v) = u$$

(يوجد)

وهو شرط التطبيق الغامر

أي شعاع في المستقر صورته وفق هذا التطبيق هو هذا الشعاع

ملاحظة : بعد الفضاء الصفري هو الفضاء الشعاعي الوحيد الذي قياسه يساوي الصفر



٭ التطبيق غير الشاذ (الطبيعي) ٭

تعريف: نقول عن التطبيق الخطي $f: V \to U$ أنه تطبيق خطي غير شاذ إذا كان لا يوجد في المنطلق V إلا الشعاع O_V والذي صورته هو O_U

٭ التطبيق الشاذ ٭

يكون التطبيق الخطي $f: V \to U$ تطبيقاً شاذاً إذا وجد في المنطلق V شعاع واحد على الأقل $v \neq O_V$ والذي صورته هو O_U

بكلام آخر

يكون التطبيق الخطي $f: V \to U$ تطبيقاً غير شاذ إذا كان

$$\ker f = \{O_V\}$$

ويكون التطبيق الخطي $f: V \to U$ تطبيقاً شاذاً إذا كان

$$\ker f \neq \{O_V\}$$

مبرهنة هامة: $d(V) = d(\ker f) + d(f(V))$

حسب المثال 2 نجد أن $f: R^3 \to R^3$

$d(R^3) = 3 \qquad d(f(R^3)) = 2$

حسب المبرهنة

$$d(R^3) = d(\ker f) + d(f(R^3))$$

$$\Rightarrow d(\ker f) = d(R^3) - d(f(R^3))$$

$$= 3 - 2 = 1 \neq 0$$

التطبيق شاذ $\Leftarrow \ker f \neq \{O_V\} \Rightarrow$

حيث عرفنا بالعلاقة $f(x,y,z) = (x-y, y+z, 2x-2y)$

والجملة $(2,0,1),(1,1,-1),(0,1,0)$ مولدة لـ $f(R^3)$

نتبع الخطوات السابقة في المثال السابق ونشكل مصفوفة ونحولها إلى متدرجة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنها مصفوفة وقياسها 2 وهو عدد الأسطر غير المعدومة من المصفوفة المتدرجة

$$\Rightarrow \text{rank} f = d(f(R^3)) = 2$$

☼ التطبيق المتباين ☼

التطبيق المتباين: هو التطبيق الذي يقابل كل صورة من المنطلق بصورة خاصة به في المستقر

$\forall v_1, v_2 \in V ; f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$

وهو شرط التطبيق المتباين

☼ التطبيق الغامر ☼

$\forall u \in U \longrightarrow \exists v \in V ; f(v) = u$ يوجد

وهو شرط التطبيق الغامر

أي شعاع في المستقر صورته وفق هذا التطبيق هو هذا الشعاع

ملاحظة: بعد الفضاء الصفري هو الفضاء الشعاعي الوحيد الذي قياسه يساوي الصفر

حسب المثال 1

$f : R^3 \longrightarrow R^3$

$f(x,y,z) = (x+y \, , y-z \, , x)$

$d(f(R^3)) = 3$

$d(R^3) = 3$

$d(\ker f) = d(R^3) - d(f(R^3))$

$= 3 - 3 = 0$

التطبيق غير شاذ $\Leftarrow$ $\Rightarrow \ker f = \{0_v\}$

طريقة ثانية للحل : $\ker f = ?$

$\forall (x,y,z) \in \ker f \Rightarrow f(x,y,z) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (x+y, y-z, x) = (0,0,0)$

$\Rightarrow x+y=0 \, , \, y-z=0 \, , \, x=0$

$\Rightarrow x = y = z = 0$

لذا التطبيق غير شاذ

« انتهت المحاضرة الرابعة »

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح ☺

إعداد : فاطمة الشميني